

C I Ê N C I A A B E R T A

Teias Matemáticas

Frentes na Ciência e na Sociedade

M. PAULA SERRA DE OLIVEIRA

Coordenadora

gradiva • Imprensa da Universidade de Coimbra

(Página deixada propositadamente em branco)

MARIA PAULA SERRA DE OLIVEIRA

Coordenadora

TEIAS MATEMÁTICAS

Frentes na Ciência e na Sociedade



gradiva



Imprensa da Universidade de Coimbra

© Gradiva – Publicações, L.^{da} / Imprensa da Universidade de Coimbra, 2004

Coordenação editorial: *Maria Paula Serra de Oliveira*

Tradução: *Artur Soares Alves*

Carlota Isabel Leitão Pires Simões

Francisco José Craveiro de Carvalho

João Filipe Cortez Rodrigues Queiró

José Miguel Dordio Martinho de Almeida Urbano

Lia Sandra dos Santos

Mário da Silva Rosa

Paulo Eduardo Aragão Aleixo Neves de Oliveira

Revisão do texto: *Isabel Pedrome*

Capa: *António Barros* [Imprensa da Universidade, Coimbra], com imagem de *E. M. de Melo e Castro*, “Fract 010 explod MC”, Dezembro de 2003

[Fractal original gerado no Fractint com tratamento no Photoshop 7.0]

Infografia: *Estúdios Estimulus* [design]

Paginação: *António Resende e Victor Hugo Fernandes*

Impressão e acabamento: *G.C. – Gráfica de Coimbra, L.^{da}*

Reservados os direitos para Portugal por:

Gradiva – Publicações, L.^{da} e Imprensa da Universidade de Coimbra

Gradiva – Publicações, L.^{da}

Rua Almeida e Sousa, 21, r/c, esq. • 1399-041 Lisboa

Telefs. 21 397 40 67/8 • 21 397 13 57 • 21 395 34 70

Fax 21 395 34 71 • Email: gradiva@ip.pt

URL: <http://www.gradiva.pt>

Imprensa da Universidade de Coimbra

Rua Antero de Quental, 195 • 3000-033 Coimbra

Telefs. 351 239 85 31 10

Fax 351 239 85 31 19 • e-mail: fjrpress@ci.uc.pt

URL: <http://www.imp.uc.pt>

ISBN: 972-662-970-5

1.^a edição: Maio de 2004

Depósito legal n.º 210431/04

OBRA PUBLICADA COM O PATROCÍNIO DE:
CENTRO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E DO ENSINO SUPERIOR

Portugal

A matemática e a forma de ver o mundo

RESUMO

«Medir e representar a Terra» é uma expressão que pode descrever resumidamente a actividade do engenheiro geógrafo.

A medição e representação do espaço que nos rodeia, e do mundo em geral, sempre foi uma necessidade do homem, com aplicação em diferentes actividades: transportes, estratégia militar, agricultura, caracterização da propriedade, planeamento, etc., sem excluir as de natureza predominantemente especulativa e científica.

Os processos de medição (geodesia) e representação (cartografia) da Terra foram evoluindo ao longo dos tempos, com recurso a técnicas e tecnologias cada vez mais sofisticadas. Para além dos aspectos puramente tecnológicos, a conceptualização e modelação da realidade carecem de formulações matemáticas adequadas.

Para modelar matematicamente o espaço apresentam-se sempre várias possibilidades, que diferem entre si de diversas formas, por exemplo, do tipo de função e variáveis usadas, das técnicas numéricas associadas à capacidade e eficácia computacional, etc. Deste modo, a representação do espaço depende da escolha dos números e das formulações matemáticas utilizadas.

Essa representação, sob a forma de cartografia tradicional ou, mais modernamente, de visualização apoiada em sistemas de informação, condiciona a nossa forma de ver o mundo. Em tudo isto, obviamente, a matemática não é inocente.

Na presente comunicação faz-se uma retrospectiva da evolução dos processos de medição e representação da Terra e aponta-se, com alguns exemplos, de que modo a nossa percepção do espaço e dos factos pode ser condicionada pelos números e formulações matemáticas. Em suma, procura-se descobrir algumas das teias com que a matemática enreda a realidade.

1. INTRODUÇÃO

A engenharia geográfica actual é herdeira de um conjunto de actividades que acompanham praticamente todo o percurso da humanidade, e que se podem resumir com a expressão «medir e representar a Terra».

De facto, o ser humano sentiu desde sempre a necessidade de conhecer o espaço que o rodeava, de forma a poder guardar e transmitir o conhecimento que ia adquirindo dos diferentes fenómenos espaciais (zonas de caça, rotas de navegação, territórios ocupados, etc.) que influenciavam a sua vida.

Obviamente que para representar é necessário um conhecimento prévio do tamanho e forma do espaço a representar, ou, dito de outra maneira, da posição tridimensional dos objectos e das ocorrências espaciais num determinado sistema de referência. Numa primeira fase da história do homem, esta actividade não tinha quaisquer características científicas, isto é, não se apoiava em princípios que permitissem aferir o rigor com que a representação era feita. À medida que o conhecimento no âmbito das ciências (como a matemática e a física) foi progredindo, foi sendo possível transportar para as actividades de medição e representação do espaço os conceitos que permitiram a criação das ciências associadas à medição e representação da Terra, a geodesia e a cartografia.

Desta forma, a geodesia e a cartografia autonomizaram-se enquanto áreas científicas, tendo sempre como base os princípios da matemática e da física, essencialmente, e mais recentemente das ciências da informação. As formulações da matemática são particularmente determinantes para a modelação de fenómenos. As diferentes possibilidades de criar os modelos que representam a realidade espacial oferecidas por esta ciência condicionam claramente a representação associada a esses modelos.

Quando alguém pretende ir para um local onde nunca tenha estado, a melhor maneira de ter um conhecimento prévio desse lugar é a consulta de um mapa, elaborado segundo um conjunto de leis matemáticas que

traduzem um conjunto de características que o seu autor pretendeu evidenciar, e concebido a partir da utilização de um determinado modelo matemático e físico da Terra. Pode dizer-se assim que o mapa é um modelo da realidade e que a percepção da realidade é feita não a partir da sua observação directa, mas essencialmente do modo como essa realidade foi modelada e transmitida.

Este facto tem actualmente uma expressão mais vincada, decorrente da utilização de sistemas de informação, que também introduzem factores que podem modificar a forma como vemos o mundo que nos rodeia.

Nos dois capítulos seguintes far-se-á uma abordagem breve à evolução dos processos de medição e representação da Terra e do modo como as formulações matemáticas condicionaram e condicionam a nossa forma de ver o mundo, sendo o quarto capítulo dedicado ao posicionamento e navegação, com recurso às técnicas espaciais e às tecnologias da informação.

2. A FORMA E AS DIMENSÕES DA TERRA

2.1 Primeiras abordagens

Como foi referido anteriormente, as primeiras noções sobre a forma e as dimensões da Terra careciam de qualquer fundamentação científica. Os filósofos tinham a sua interpretação muito própria do mundo, baseada essencialmente no conhecimento transmitido pelos viajantes que percorriam terras e mares, necessariamente em zonas bastante restritas.

Assim, a escola de Mileto, através de Tales, cerca de 600 a.C., concebia o mundo como um disco achatado envolto por um oceano infinito (figura 1). Esta ideia já tinha sido expressa por Homero na *Iliada*, cerca de 800 a.C. Esta obra designava o oceano circundante por *Oceanus*. A concepção de Anaximandro, da mesma escola, era semelhante, apenas diferindo na orientação Norte-Sul do disco.



Fig. 1 — Concepção de Tales (cerca de 600 a.C.)

Cerca de 250 anos mais tarde, Aristóteles concebe a Terra como uma esfera e faz a primeira alusão à existência de um campo gravítico, obviamente com outra designação, introduzindo simultaneamente a primeira abordagem científica. A argumentação incluía o facto de a forma da sombra da Terra na Lua durante os eclipses ter sempre um contorno circular, independentemente da posição relativa dos dois corpos no espaço; ora tal só seria possível se a Terra fosse uma esfera (Jones, T., 1967). Concomitantemente, foi utilizado um outro argumento: quando um barco se afastava no horizonte, o que desaparecia em último lugar eram os mastros e as velas.

Esta evolução do conhecimento da forma da Terra, associada ao desenvolvimento da astronomia, permitiu a Eratóstenes, cerca de 230 a.C., realizar as primeiras operações que conduziram à determinação do raio da esfera terrestre e, conseqüentemente, das dimensões do nosso planeta; é por isso considerado por vários autores (Torge, W., 1991) o fundador científico da geodesia.

Possuindo o conhecimento de que num determinado dia do ano os raios solares incidiam perpendicularmente num poço em Assuão quando o Sol atingia a altura máxima (isto é, cruzava o meridiano do lugar), e de que noutra lugar (Alexandria), situado mais a norte sobre o mesmo meridiano, no mesmo dia, os raios solares provocavam sombra nos objectos verticais, foi possível a Eratóstenes determinar o valor angular do arco de meridiano (Φ) entre os dois lugares. Bastava-lhe agora medir o comprimento desse arco de meridiano (S) para determinar o raio (R) da esfera (figura 2) usando a conhecida relação matemática

$$R = S / \Phi,$$

com Φ expresso em radianos.

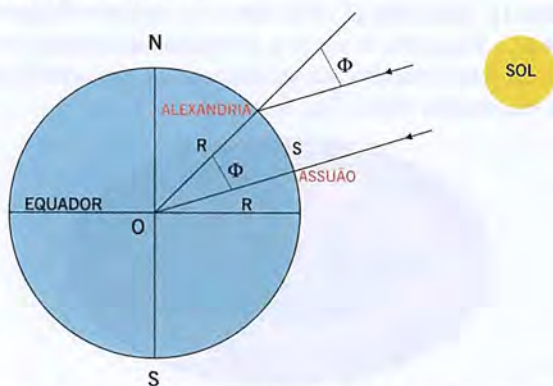


Fig. 2 — Determinação do raio da Terra por Eratóstenes

Reza a história que Eratóstenes mediu o comprimento do arco de meridiano a partir das distâncias patentes na informação cadastral egípcia, as quais eram obtidas através da contagem de passos de camelo, conhecendo o equivalente linear de cada passo.

O valor encontrado por Eratóstenes para a distância foi de cerca 5000 estádias egípcias, e o valor angular do arco de meridiano foi de cerca $1/50$ de uma circunferência. Transportando para unidades métricas (1 estádia = $157,5$ m), encontra-se um valor de 6267 km para o raio da esfera, o que é cerca de 2% inferior ao actualmente estabelecido (Torge, W., 1991).

Esta determinação, pelos resultados obtidos, é notável. Deve no entanto ter-se em consideração que as operações realizadas por Eratóstenes continham várias fontes de erro. Por um lado, sabe-se hoje que Assuão e Alexandria não se encontram no mesmo meridiano, e é óbvio que a determinação da distância sofreu as vicissitudes decorrentes da forma como foi realizada. Encontramos aqui um bom exemplo de como os erros de alguma forma se compensaram, ao invés do que as leis de Murphy preconizam.

Durante todo o período da história que se seguiu, até ao século XVII, foram realizadas várias determinações do raio da Terra baseadas no modelo esférico, em especial a partir do momento em que passaram a estar disponíveis instrumentos para observação astronómica. O procedimento seguia em geral a essência do método de Eratóstenes: medir os valores angulares e lineares de um arco de meridiano.

Os procedimentos operacionais conduziram à concepção do que hoje se designa por *rede geodésica*. O valor angular do arco de meridiano era determinado por observação astronómica em dois pontos situados sobre (ou quase) o mesmo meridiano. Quanto à medição da distância entre esses pontos, era conseguida com recurso à expansão de uma distância medida sobre um ou mais lados de um triângulo através de uma cadeia de triângulos. São de destacar as operações realizadas por Tycho Brahe, na Dinamarca, e por Willebrord Snellius, na Holanda, nos finais do século XVI.

2.2 O campo gravítico e a figura da Terra

As considerações sobre o campo gravítico terrestre iriam desempenhar um papel fundamental na etapa seguinte da determinação da forma e dimensões da Terra, que consistiu essencialmente no reconhecimento de que a forma do nosso planeta se assemelharia à de um elipsóide achatado nos pólos.

O primeiro sinal deste facto foi obtido por Cassini, em 1691, quando observou Júpiter com um telescópio e verificou que este planeta tinha um achatamento polar, quantificado pelo próprio Cassini: o diâmetro equatorial seria 1/15 maior que o eixo polar.

O segundo sinal proveio do francês Richer. Este astrónomo tinha sido enviado pelo seu governo para a ilha de Cayenne, situada na zona equatorial, com o objectivo de determinar as paralaxes de vários planetas do sistema solar, os movimentos de Mercúrio, as coordenadas astronómicas de algumas estrelas não visíveis em Paris, etc., e, o mais importante de tudo para a nossa história, o comprimento do pêndulo de segundos em Cayenne.

Ora Richer verificou que teria de o encurtar relativamente ao valor que trazia de Paris, onde tinha sido perfeitamente ajustado, por ter verificado que perdia diariamente 2 minutos e 28 segundos nos seus relógios de pêndulo. Quando regressou a Paris verificou que tinha de realizar a operação inversa, por comparação com o pêndulo de Paris, para obter novamente oscilações de 1 segundo. Este mesmo fenómeno foi verificado por Halley, em 1677, quando realizou observações em Santa Helena relativamente ao comprimento do pêndulo que tinha transportado de Inglaterra, e confirmado por experiências posteriores.

É neste cenário que surge Isaac Newton. Conjugando estes dois sinais, Newton estipulou, na *Proposição XVIII, Teorema XVI*, da sua obra *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (1678), que «os eixos dos planetas são menores que os diâmetros perpendiculares aos eixos». O achatamento de Júpiter observado foi explicado considerando que a matéria está em estado fluido e que o seu comportamento num corpo em rotação seria descer ao longo do eixo para o equador, alargando desta forma o diâmetro equatorial e encurtando o eixo.

A consequência seguinte é que a força da gravidade é mais intensa nos pólos do que no equador, já que a distância é ali menor e a força centrífuga é variável com a latitude, exercendo-se numa direcção oposta à força resultante da atracção (newtoniana) da massa da Terra sobre uma massa à sua superfície. A figura 3 documenta este facto relativamente às acelerações (aceleração centrífuga a_c , aceleração newtoniana a_N e aceleração da gravidade a_g).

As normas destes vectores são dadas por

$$|\overline{a_N}| = GM / R^2 \quad \text{e} \quad |\overline{a_c}| = \omega^2 r,$$

em que G , M , R , ω e r representam, respectivamente, a constante de gravitação universal, a massa da Terra, a distância de um ponto da superfície ao centro da Terra, a velocidade angular de rotação da Terra e o raio do paralelo onde o ponto se localiza.

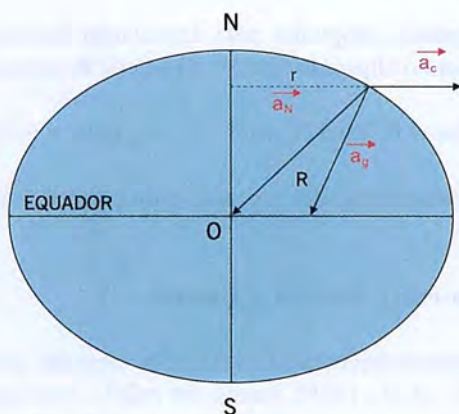


Fig. 3 — A aceleração da gravidade como resultante das acelerações centrífuga e newtoniana

Foi possível a Newton, a partir das diferenças de gravidade encontradas, estabelecer o elipsóide rotacional como figura de equilíbrio de uma Terra homogênea, fluida e em rotação. Mais ainda, determinou que o achatamento do elipsóide teria o valor de $1/230$, com base na teoria de uma Terra homogênea; Huygens determinou o valor de $1/576$, com base numa grande concentração de massas no centro. Registe-se que o valor actual é de cerca $1/298$.

O achatamento geométrico f pode obter-se a partir dos semi-eixos maior (a) e menor (b) da elipse meridiana, de acordo com a relação

$$f = (a - b) / a.$$

Os valores dados por Newton e Huygens podem ser obtidos a partir das equações estabelecidas por Clairaut em 1743:

$$\begin{aligned} f &= 3(C-A) / (2 M a^2) + m / 2; \\ f_g &= 2 f - 9(C-A) / (2 M a^2) + m; \\ f + f_g &= 5 / 2 m, \end{aligned}$$

em que A e C são os momentos de inércia, m é a relação entre as acelerações centrífuga e newtoniana equatorial ($m = 1/288$) e f_g é o achatamento gravítico.

Na hipótese de Newton, $f = f_g = 5/4 m$, e na de Huygens $f = 1/2 m$. Note-se que os valores da gravidade teórica equatorial e polar para um

elipsóide homogéneo, adoptados pela Associação Internacional de Geodesia em 1980 para o elipsóide GRS80 (Geodetic Reference System), são:

$$a_g \text{ equador} = 9,780\,327 \text{ ms}^{-2} \quad a_g \text{ pólo} = 9,832\,129 \text{ ms}^{-2}.$$

A variação entre o equador e o pólo é de cerca 0,5%.

2.3 A polémica entre Newton e Cassini

Já antes fizemos referência a Cassini. Este cientista, no final do século XVII (Kakkuri, J., *et al.*, 1986), tomou em mãos a realização do projecto de medição do arco de meridiano entre Dunquerque e Perpignan, da forma como o havia feito Picard. Das suas medições concluiu que «[...] parece bastante evidente que os graus de um meridiano são maiores quanto mais perto do equador e, contrariamente, diminuem à medida que se aproximam do pólo».

Ora esta afirmação era exactamente contrária à teoria de Newton, e em redor desta circunstância estabeleceu-se uma enorme polémica. A forma de resolver a questão foi encontrada pela Academia Real das Ciências francesa, que em 1734 decidiu realizar uma experiência controlada.

Assim, foram organizadas duas expedições a locais afastados em latitude. Em 1736 Maupertuis partiu para a Lapónia, de onde regressou em Agosto de 1737, com as observações realizadas. Da sua equipa faziam parte Celsius e Clairaut, entre outros. A outra expedição teve como destino o Peru e era chefiada por Bouguer. Enquanto a primeira operação se desenrolou sem percalços de maior, a segunda sofreu várias vicissitudes, o que fez que só em 1744 fosse possível a Bouguer apresentar os seus resultados.

Os cálculos realizados permitiram, por um lado, confirmar a teoria de Newton em detrimento da de Cassini e, por outro, calcular o valor de $1/207$ para o achatamento polar. Os resultados discrepantes de Cassini foram explicados por um lado por alguns erros de cálculo e por outro pela pouca precisão dos instrumentos utilizados.

Esta operação e o conjunto de acontecimentos que a rodearam, envolvendo os mais notáveis cientistas da época e de todos os tempos, constituíram um dos marcos mais notáveis da ciência, não só pelos meios que foram utilizados como pelo conjunto de desenvolvimentos científicos

resultantes. Revelou também o enorme poder da matemática e da física, que levou Voltaire a afirmar (Kakkuri, J., *et al.*, 1986):

*Vous avez confirmé dans ces lieux pleins d'ennui
Ce que Newton connut sans sortir de chez lui.*

2.4 A evolução do conhecimento até à nossa época

Depois do reconhecimento de que o modelo matemático que mais se adequava à forma da Terra era um elipsóide de revolução em torno do eixo menor, assistiu-se a um grande desenvolvimento científico e à generalização das operações de determinação de arcos de meridiano por forma a obter medidas cada vez mais rigorosas do nosso planeta. As operações de medição foram também aproveitadas para criar redes geodésicas nacionais e regionais; a este propósito, mostra-se na figura 4 a Triangulação Geodésica de 1ª Ordem de Portugal, concebida por Filipe Folque em 1876. No entanto, as técnicas utilizadas eram semelhantes, apenas diferindo numa cada vez maior precisão dos equipamentos e no refinamento das técnicas de cálculo.

A partir dos anos 60 do século XX, a utilização do espaço exterior veio trazer um novo impulso a este domínio do conhecimento, contribuindo para uma espectacular melhoria da precisão na determinação dos parâmetros necessários ao conhecimento da forma e dimensões da Terra.

Portugal foi palco de uma das primeiras operações de medição baseadas na utilização de satélites artificiais, que consistiu na ligação do arquipélago dos Açores ao continente através da observação dos satélites passivos Echo 1 e Echo 2 (Levallois, J. J., 1988), realizada em conjunto pelo Instituto Geográfico Nacional de França e pelo Instituto Geográfico e Cadastral de Portugal. A técnica utilizada foi a triangulação espacial, que tinha os dias contados, já que pouco depois, nos anos 70, surge o sistema Transit do Departamento de Defesa dos Estados Unidos, e nos anos 80 o GPS.

Mas não foi só a utilização de satélites artificiais que deu a sua contribuição para o melhor conhecimento da forma e dimensões da Terra. Outras técnicas são usadas, como o VLBI (Very Long Baseline Interferometry), o SLR (Satellite Laser Ranging) e o LLR (Lunar Laser Ranging).

Para se ter uma percepção global da evolução do conhecimento nesta matéria, apresentam-se na tabela seguinte algumas das determinações do semi-eixo maior e achatamento do elipsóide ao longo dos tempos. Registe-se que alguns dos valores apresentados são aproximados, e que a precisão associada ao último é de cerca de 1 metro.

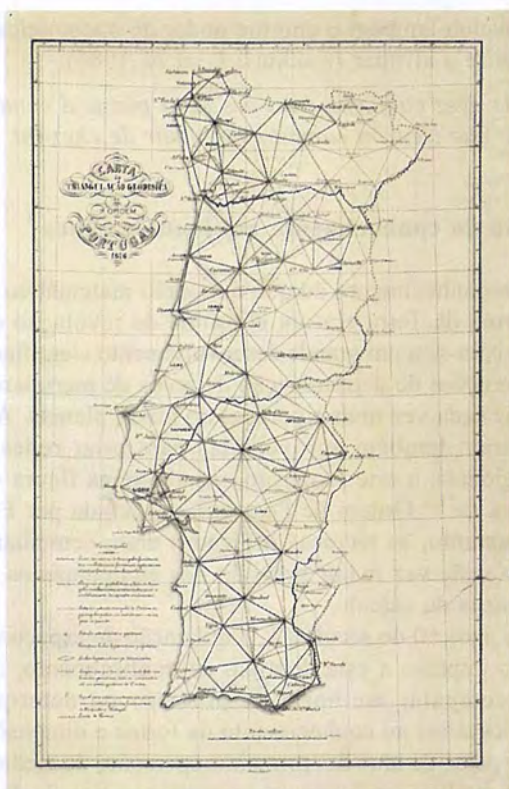


Fig. 4 — Carta da Triangulação Geodésica de 1.ª Ordem de Filipe Folque, 1876.
(Mapoteca do Instituto Português de Cartografia e Cadastro)

	Ano	a (m)	1/f
Eratóstenes	230 a.C.	6 267 000	∞
Bouguer, Maupertuis	1744	6 397 300	207
Delambre	1810	6 376 985	308.64
Everest	1830	6 377 276	300.8
Airy	1830	6 377 563	299.3
Bessel	1840	6 377 397	299.15
Clarke	1880	6 378 245	293.5
Hayford	1910	6 378 388	297
Jeffreys	1948	6 378 097	297.28
GRS80	1980	6 378 137	298.26

3. A REPRESENTAÇÃO DA TERRA

3.1 Os modelos matemáticos da cartografia

As aventuras da medição e representação da Terra estão claramente associadas. As primeiras tentativas cartográficas não tinham qualquer fundamentação científica e as representações da realidade eram condicionadas pelo conhecimento que se ia adquirindo do espaço envolvente. O mapa surge como necessidade de transmitir esse conhecimento, isto é, constitui-se como um meio de comunicação, com uma semântica própria.

Sem pretensões de fazer uma história da cartografia, que não cabe obviamente num escrito desta natureza, vale a pena referir que o cadastro da propriedade egípcio constituiu talvez a primeira forma de cartografia com alguns fundamentos científicos e, como se viu antes, esteve na base da primeira determinação do valor do raio terrestre.

Esta história vai ser retomada apenas no século XVI, quando Gerardo Kramer concebe, para navegação, a primeira representação da Terra baseada numa formulação matemática. Atendendo às finalidades dessa carta, a linha de rumo (e azimute, obviamente) constante, a loxodrómia, é representada por uma recta, bem como os meridianos (Guedes, J., 2000). Esta representação designa-se por «projecção de Mercator» (figura 5).



Fig. 5 — Projecção de Mercator

A projecção de Mercator é uma transformação matemática inspirada numa projecção cilíndrica normal (projecção geométrica pura, em que a superfície terrestre é envolvida por uma superfície cilíndrica com o eixo coincidente com o eixo de rotação da Terra) e tem a propriedade de manter os ângulos infinitesimais (e consequentemente as formas), designando-se por isso de «conforme».

O problema da cartografia é realmente complicado, já que não é possível planificar uma esfera ou um elipsóide. A figura 6 mostra as analogias geométricas que são normalmente utilizadas para as representações cartográficas, bem como a impossibilidade de representar a superfície terrestre num plano sem introduzir alguma espécie de deformação.

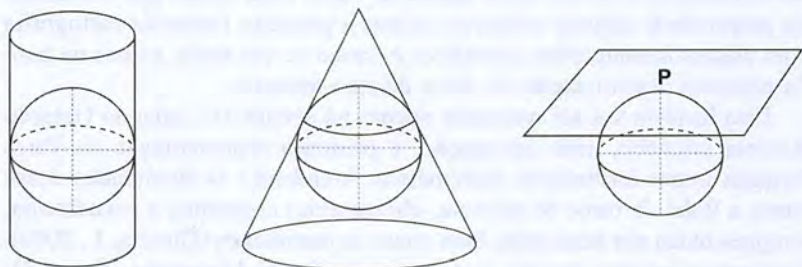


Fig. 6 — Analogias geométricas para as projecções cilíndricas, cónicas e azimutais

Uma projecção cartográfica consiste em estabelecer uma correspondência entre as coordenadas geográficas ϕ (latitude) e λ (longitude) e as coordenadas rectangulares (cartesianas) x e y , de forma a preservar algumas propriedades geométricas, como já foi referido. Formalmente,

$$x = f_1(\phi, \lambda) \quad \text{e} \quad y = f_2(\phi, \lambda).$$

No caso da projecção de Mercator (Afonso, J., 1972),

$$x = R \Phi \quad \text{e} \quad y = R \lambda,$$

em que R é o raio da Terra (modelo esférico) e Φ representa a latitude isométrica, que, no caso de uma superfície esférica, está relacionada com a latitude ϕ por

$$\Phi = \ln (\operatorname{tg} (\pi/4 + \phi/2)).$$

Desta formulação resulta que a distância entre os paralelos vai aumentando do equador para os pólos, e é a forma de conseguir representar por uma recta a linha de rumo constante, com óbvias vantagens para a navegação, e manter a propriedade da conformidade.

A necessidade de cartografar países em diferentes localizações geográficas, com determinadas configurações geométricas, e regiões mais ou menos extensas do globo, fez que fossem sendo criadas projecções cartográficas cujas propriedades geométricas se adequassem melhor às finalidades pretendidas.

Em Portugal utiliza-se actualmente a projecção de Gauss (1820), com a formulação introduzida posteriormente por Krüger (1912), pelo que também se designa por Gauss-Krüger. É uma projecção conforme, e pode dizer-se, como analogia geométrica, que corresponde, grosso modo, à projecção da superfície do elipsóide sobre uma superfície cilíndrica cujo eixo é perpendicular ao eixo de rotação da Terra; por este motivo também é por vezes designada por «transversa de Mercator». O meridiano central representa-se por uma recta. A correspondência entre as coordenadas geográficas e as rectangulares é estabelecida por (Afonso, J., 1972)

$$x = \lambda N \cos \phi + (\lambda^3/3!) N A \cos^3 \phi + (\lambda^5/5!) N B \cos^5 \phi;$$

$$y = \sigma + (\lambda^2/2!) N \sin \phi \cos \phi + (\lambda^4/4!) N C \sin \phi \cos^3 \phi,$$

em que σ representa o comprimento de um arco de meridiano (dependente da latitude) e as outras variáveis são igualmente dependentes da latitude do ponto:

$$\sigma = g_1(\phi); \quad N = g_2(\phi);$$

$$A = g_3(\phi); \quad B = g_4(\phi); \quad C = g_5(\phi).$$

Refira-se a propósito que o cálculo de s não é directo no caso do modelo elipsóidico, já que somos confrontados com um integral elíptico de 3.ª espécie, pelo que se recorre a métodos de integração numérica. Novamente, evidencia-se aqui a importância da matemática através de uma das suas disciplinas.

A figura 7 ilustra a maneira como Portugal é representado utilizando esta projecção, particularmente adequada a uma região com um desenvolvimento Norte-Sul. O meridiano central da projecção encontra-se no centro de Portugal.



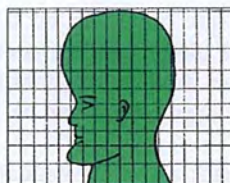
Fig. 7 — Projecção de Gauss utilizada em Portugal

3.2 Como se adequam os modelos à realidade?

A teoria das projecções cartográficas tem uma ligação directa com a matemática, em particular com a geometria diferencial. Existem inúmeras, concebidas de forma a satisfazer determinados requisitos, que podem ser técnicos (manutenção de ângulos infinitesimais ou áreas finitas, por exemplo) ou ainda políticos ou estratégicos (Black, J., 1997). De facto, a história da cartografia é preñhe de situações em que a escolha de determinada projecção é condicionada pela visão que se pretende dar da realidade. A matemática, enquanto ciência de base para a cartografia, aparece-nos assim como um instrumento para modelar essa realidade. A figura 8 (Guedes, J., 2000) mostra o modo como ocorrem as deformações resultantes de três modelações diferentes.



Mollweide



Mercator



Cilíndrica equivalente

Fig. 8 — Deformações produzidas por três projecções cartográficas distintas

«Os mapas são um modelo selectivo da realidade» (Black, J., 1997). Esta frase resume bem o que antes foi expresso. Além do exemplo mostrado na figura 8, e para se ter uma ideia mais clara destas teias tecidas pela matemática, apresentam-se na figura 9 várias representações da Gronelândia, onde é patente a enorme diferença de áreas e de forma resultantes de cada representação. Para a generalidade das pessoas, esta ilha apresenta-se como possuindo enormes dimensões, quando, de facto, a sua área é de cerca quatro vezes a área da França.



Fig. 9 — A Gronelândia representada por quatro projecções cartográficas distintas

Posto isto, uma questão se coloca. Qual o modelo que deve ser utilizado? A resposta já foi sendo dada antes; a escolha do modelo matemático é condicionada pelas características que se pretende incutir à representação, de acordo com a finalidade. Exemplificando, o sistema de projecção utilizado em Portugal não deve ser alargado globalmente, pois provoca distorsões que não são razoáveis e modifica completamente a ideia que temos sobre a posição relativa dos continentes. O resultado da extensão da projecção é patente na figura 10.

Como nota final neste tema, vejamos o que acontece se for feita uma pequena alteração a um dos modelos matemáticos antes referidos. Mudando o sinal nas fórmulas que caracterizam a projecção de Mercator, obtém-se

$$x = -R \Phi \quad e \quad y = -R \lambda.$$



Fig. 10 — Extensão da projecção de Gauss usada em Portugal

Esta pequena modificação na formulação tem um resultado prático drástico, que é mostrado na figura 11: o mundo aparece-nos de pés para o ar. O resultado psicológico é o aparecimento do hemisfério sul como parte dominante, o que tem óbvias incidências políticas. A cartografia aparece-nos assim (e a matemática, por arrastamento) como um instrumento de manipulação.



Fig. 11 — O mundo é dominado pelo hemisfério Sul

3.3 A intervenção das ciências da informação

É difícil encontrar uma actividade do mundo actual em que não haja intervenção das ciências da informação, em níveis mais ou menos complexos. A cartografia, e em geral as actividades que lidam com informação geo-referenciada, foi das primeiras a procurar adaptar os seus paradigmas aos métodos tornados possíveis pela informática, cuja expressão mais visível são os sistemas de informação geográfica.

Um dos paradigmas que tiveram de ser modificados foi o que diz respeito à forma de representação dos objectos cartográficos, de modo a tornar possível a sua percepção pelos sistemas computacionais e a construção de bases de dados gráficas. A cartografia digital criou os seus formatos próprios, que são basicamente o matricial e vectorial (Molenaar, M., 1998). Novamente, a matemática foi fundamental neste processo, já que no primeiro caso é claramente visível uma intervenção da álgebra e no segundo as noções de topologia são fundamentais para criar estruturas de dados manejáveis.

Com este novo meio de produção, processamento, armazenagem e manipulação de dados espaciais tornou-se também possível a sua rápida integração, permitindo criar uma mais-valia na sua exploração, que conduz por sua vez à obtenção de mais informações (Korte, G., 1997). É o caso, por exemplo, da associação de bases de dados gráficas e alfanuméricas e de imagem, o que permite uma percepção mais correcta da realidade.

A figura 12 apresenta um exemplo desta associação. Nela estão representados um ortofotomapa digital (matricial) da região de Avis, vendo-se parte da albufeira do Maranhão, e a cartografia digital (vectorial) codificada de forma a poder ser explorada pelo sistema de informação (IPCC, 2000). No lado esquerdo da figura encontra-se a legenda. Este sistema permite activar ou desactivar níveis de informação e fazer diferentes tipos de análise.

Seria monótono, e nem esse é o propósito deste artigo, referir todas as áreas da informação geográfica a que a informática trouxe uma mais-valia. Refira-se apenas, como mais um exemplo, a construção de modelos numéricos de elevação (Fonseca, A., *et al.*, 2000), que permitem também a exploração por sistemas de informação geográfica e possibilitam vários tipos de análise que, sem estes meios, seriam bastante mais morosas e complicadas.

É o caso do cálculo de intervisibilidades, importante para o planeamento em telecomunicações, e de pendentes de terreno e exposição solar, com aplicações óbvias nas áreas agrícola e hidrológica, entre outras. Também aqui os modelos matemáticos associados são importantes, pois

a sua maior ou menor capacidade de interpretar a realidade a partir de um conjunto finito e discreto de dados condiciona a forma como é representado o relevo e os resultados das análises espaciais.

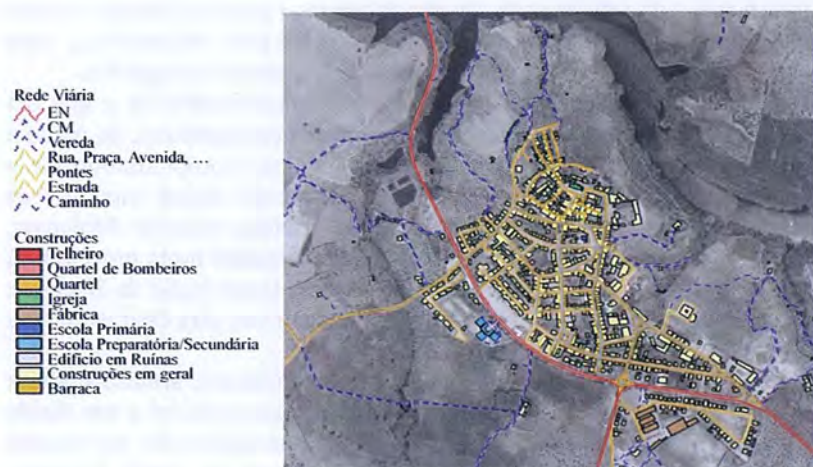


Fig. 12 — Sistema de informação geográfica

4. O POSICIONAMENTO E A NAVEGAÇÃO

4.1 Como nos localizamos?

Na actividade humana actual e na sociedade da mobilidade em que vivemos é cada vez mais fundamental conhecermos a nossa posição no espaço e sabermos qual a direcção a tomar. Por outras palavras, o posicionamento e a navegação tornaram-se actividades de tal forma importantes que já é comum encontrar viaturas terrestres com estes sistemas.

É clara a ligação à temática que estamos a tratar. No fim de contas, está-se a lidar com cartografia digital e com sistemas de posicionamento por satélite, na maioria dos casos o Sistema de Posicionamento Global (GPS).

Será que aqui também a matemática influi na nossa forma de ver o mundo? É o que vamos ver a seguir.

O GPS é um instrumento fundamental para a geodesia actual, como antes foi referido. As aplicações nesta área vão do posicionamento de alta precisão até à determinação dos parâmetros de orientação da Terra, passando pelo controlo de deformações e pela geodinâmica. Embora o sistema tenha iniciado o seu funcionamento há cerca de vinte anos, apenas na última década passou a estar acessível de forma consistente. Nos últimos cinco anos assistiu-se a um proliferar de aplicações e utilizações, decorrentes não só do conhecimento público cada vez maior das suas capacidades e potencialidades como também do baixo custo dos receptores, acessíveis à bolsa do cidadão médio. É evidente que estamos a falar agora de receptores que apenas utilizam a informação contida no código C/A e destinados a aplicações fundamentalmente na área do posicionamento de baixa precisão e navegação, e não dos equipamentos utilizados em geodesia (Torres, J., *et al.*, 1996).

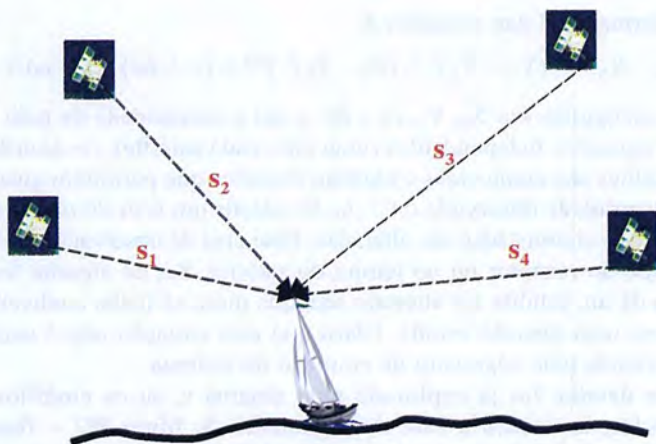


Fig. 13 — Posicionamento e navegação com GPS

O posicionamento baseado na recepção e processamento da informação contida nos códigos necessita da observação simultânea de quatro satélites (figura 13). As equações (Bastos, L., 1986) que permitem o cálculo da posição do receptor têm a seguinte forma

$$s_i = ((X_{si} - X_p)^2 + (Y_{si} - Y_p)^2 + (Z_{si} - Z_p)^2)^{1/2},$$

em que

X_p, Y_p, Z_p — coordenadas cartesianas tridimensionais do centro de fase da antena;

X_{si}, Y_{si}, Z_{si} — coordenadas cartesianas tridimensionais do satélite i ;

s_i — distância verdadeira entre o centro de fase da antena e o satélite i , dada por $s_i = d_i + v \delta t_r$;

d_i — distância observada entre o centro de fase da antena e o satélite i , dada por $d_i = v (t_i - t_0)$;

v — velocidade de propagação do sinal dada por $v = c + \delta v$;

δt_r — erro de sincronização dos relógios do receptor (t_r) e dos satélites (t_s) dado por $\delta t_r = t_s - t_r$ (supõe-se que os relógios de cada satélite estão sincronizados entre si);

t_i — instante em que o sinal do satélite i é recebido;

t_0 — instante em que o sinal é emitido;

c — velocidade de propagação da luz no vácuo;

δv — atraso na propagação do sinal.

A forma final das equações é

$$((X_{si} - X_p)^2 + (Y_{si} - Y_p)^2 + (Z_{si} - Z_p)^2)^{1/2} = (c + \delta v) ((t_i - t_0) + \delta t_r).$$

As incógnitas são X_p, Y_p, Z_p e δt_r , e daí a necessidade de pelo menos quatro equações independentes (uma para cada satélite). As coordenadas dos satélites são conhecidas e existem modelos que permitem quantificar δv ; a quantidade observada é $t_i - t_0$. Se existir um erro de observação, é claro que as coordenadas são alteradas. Esse erro de observação pode estar no tempo do receptor ou no tempo do satélite. Se, de alguma forma, o relógio de um satélite for alterado sem que disso se tenha conhecimento, obtém-se uma posição errada. Claro que esta situação não é usual, e é monitorizada pelo segmento de controlo do sistema.

Este detalhe foi já explorado pelo cinema e, se os cinéfilos estão recordados, constituiu a base do argumento do filme *007 - Tomorrow Never Dies*, onde uma intriga internacional era provocada pela introdução de um erro de tempo num dos satélites da constelação GPS, que originou a modificação das coordenadas de um barco. É então legítimo perguntar: *será que sabemos mesmo onde estamos?*

4.2 As trajectórias reais e a sua representação

Para a navegação é necessário conhecer não só a posição do objecto que se está a deslocar como também a trajectória a seguir. Já antes se viu

que a projecção de Mercator contribuiu para a representação das trajectórias marítimas com base na loxodromia (linha de azimute constante, representada na carta por uma linha recta). Essa linha facilitava obviamente o cálculo, mas não representa a distância mais curta entre dois pontos, no caso de uma superfície esférica ou elipsóidica. A distância mais curta é a geodésica (ou ortodromia), que se pode definir da seguinte forma: uma linha traçada sobre uma superfície é geodésica se, em cada ponto, a normal principal à linha for normal à superfície. A sua equação é (Torres, J., 1980)

$$r \operatorname{sen} \alpha = C,$$

em que r representa o raio do paralelo num ponto, α o azimute da geodésica nesse ponto e C uma constante própria de cada geodésica. Esta equação, aparentemente simples, é extremamente complicada de resolver sobre o elipsóide de revolução, e só se consegue fazê-lo através de processos de integração numérica. A sua resolução permite conhecer a distância mais curta entre dois pontos e a configuração da linha geodésica que une esses pontos. No caso da superfície esférica, a geodésica é um arco de círculo máximo, e a sua representação na projecção de Mercator não é uma linha recta, mas uma curva (figura 14).

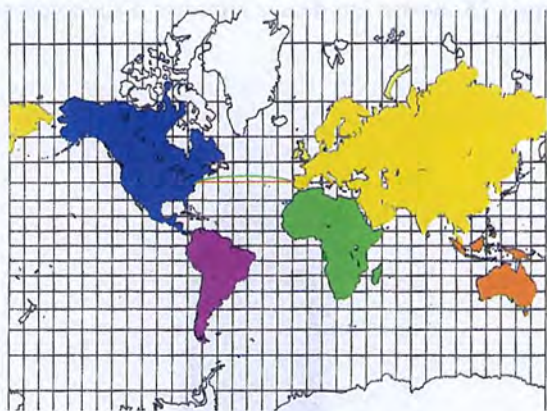


Fig. 14 — Traçado de uma geodésica e de um arco de paralelo (loxodromia)

Na figura 14 estão traçadas a geodésica (arco) e o arco de paralelo (segmento de recta) entre Lisboa e um outro ponto situado à mesma latitude no continente americano, na projecção de Mercator; neste caso o

arco de paralelo é uma loxodrómia, já que intersecta todos os meridianos segundo um ângulo de 90° . Aparentemente, a distância mais curta é a da linha recta. Não é esse o caso, pois se for calculada a distância entre Lisboa e Nova Iorque para cada uma das trajectórias obtém-se

Geodésica: 5 421 874,731 m;

Loxodrómia: 5 544 339,170 m,

o que representa uma diferença de cerca de 120 km.

Quem já viajou em aviões que vão mostrando a trajectória seguida pôde constatar esta ilusão originada pela representação cartográfica, e não é raro ouvirem-se comentários a este propósito entre os passageiros. Pode fazer-se então a pergunta: *Será que as companhias aéreas estão a usar a projecção cartográfica mais adequada às finalidades?*

4.3 O admirável mundo novo

Os actuais sistemas de localização e navegação, já disponíveis em automóveis e a que brevemente teremos acesso através dos telemóveis, utilizam as tecnologias e os princípios da cartografia digital e dos GNSS (Global Navigation Satellite Systems), de que o GPS é um dos componentes. A figura 15 mostra um desses sistemas disponíveis no mercado.



Fig. 15 — Equipamento para posicionamento e navegação

Este é o admirável mundo novo em que vivemos, e para o qual a contribuição da geodesia e da cartografia tem sido e continuará a ser fundamental, embora em termos diferentes daqui em diante. Os requisitos dos utilizadores obrigam a uma mudança de paradigma sobre a forma como a informação é posta ao serviço das tecnologias, conduzindo à procura de novos modelos para a informação cartográfica e ao desenvolvimento de novos sistemas de navegação global, como é o caso do sistema Galileo, a ser implantado brevemente na Europa, e ao aperfeiçoamento dos existentes, no caso do GPS.

5. NOTAS FINAIS

Pretendeu-se dar, ao longo do texto e tendo em conta o tema que serviu de base à sua feitura (*Teias Matemáticas*), uma ideia da importância da matemática nos problemas relacionados com a forma, dimensões e representação da Terra, através de uma abordagem que pretendeu realçar os momentos mais marcantes e decisivos desta longa história, bem como a influência desta ciência nas várias etapas deste percurso notável.

Não se deixou também de focar os desenvolvimentos actuais e o que se pode esperar num futuro mais ou menos próximo no que respeita à informação espacial.

Apontou-se, com alguns exemplos, de que modo a nossa percepção do espaço pode ser condicionada pelos números e formulações matemáticas: a matemática não é inocente. Em suma, descobrimos algumas das teias com que a matemática enreda a realidade.

A propósito do tema, e para terminar, transcreve-se um texto a todos os títulos delicioso da obra *A Caça ao Snark*, (Carrol, L., 1986) da autoria de Lewis Carrol, que, embora matemático, deixou o seu nome para a posteridade por via dos seus dotes literários.

*Quanto ao sineiro, toda a gente o adorava!
Que figura, que graça e que classe!
E como aquela face solene brilhava!
Que saber espelhava aquela face!*

*Trouxera para bordo uma carta do mar
Onde de terra nem cheiro havia.
Era um papel facilimo de interpretar
E os homens pularam de alegria.*

«*Abaixo Mercator, Pólo Norte e Equador,
Eixos, meridianos, linhas tropicais.*»
*Bradou o capitão. E a tripulação:
«Simples símbolos são convencionais.»*

«*Mapas são o diabo! Tanta ilha e cabo!
Mas o nosso Sineiro, seja Deus louvado,
Com tal nada perfeito, faz-nos grande jeito!*»
Clamou o barco à uma, entusiasmado.

Agradecimentos

Agradeço ao Instituto Português de Cartografia e Cadastro (IPCC) a disponibilização da informação e aos colegas que contribuíram para a realização do trabalho e sua revisão final: José Barreiro Guedes, Teresa Cardoso e Henrique Silva, engenheiros geógrafos, e António Pereira, operador de sistemas.

Um agradecimento é também devido à Maria de Deus, professora de Matemática, pelo apoio intelectual e moral e pela paciência com que aguentou as noites e fins-de-semana que foram precisos para levar esta nau a bom porto.

Referências

- Afonso, J. (1972) – *Cartografia Matemática*, Caderno Técnico n.º 31 do Instituto Geográfico e Cadastral, Lisboa.
- Bastos, L. (1986) – *O Sistema Global de Posicionamento*, Revista n.º 6 do Instituto Geográfico e Cadastral, IGC, Lisboa.
- Black, J. (1997) – *Maps and Politics*, Reaktion Books, Londres.
- Carrol, L. (1986) – *A Caça ao Snark*, Edições Afrontamento, Lisboa.
- Fonseca, A., Fernandes, J., Bica, V. (2000) – *Carta Imagem de Portugal à Escala 1:100 000, Relatório 2: Geração do Modelo Numérico Altimétrico*, DT 13:00 do Instituto Português de Cartografia e Cadastro, Lisboa.
- Guedes, J. (2000) – *Notas pessoais*.
- IPCC (2000) – *Elementos de trabalho do Instituto Português de Cartografia e Cadastro*, Lisboa.
- Jones, T. (1967) – *The Figure of the Earth*, Coronado Press, Lawrence.
- Kakkuri, J., Kukkamaki, T., Levallois, J., Moritz, H. (1986) – *Le 250^e Anniversaire de la Mesure de l'Arc du Meridien en Laponie*, Publicação n.º 103 do Finnish Geodetic Institute, Helsínquia.

- Korte, G. (1997) – *The GIS Book, 4th Edition*, OnWord Press, Santa Fé.
- Levallois, J. (1988) – *Mesurer la Terre*, Presse de l'École Nationale des Points et Chaussées, Paris.
- Molenaar, M. (1998) – *An Introduction to the Theory of Spatial Object Modelling for GIS*, Taylor & Francis, Londres.
- Torge, W. (1991) – *Geodesy*, Walter de Gruyter, Berlim, Nova Iorque.
- Torres, J. (1980) – *Grande Geodésica*, Caderno Técnico n.º 36 do Instituto Geográfico e Cadastral, Lisboa.
- Torres, J., Lima, J. (1996) – *O Sistema Global de Posicionamento (GPS)*, Ingenium (Revista da Ordem dos Engenheiros) n.º 12, II série, Lisboa.

Outras fontes

- Boletins informativos da American Airlines e da Iberia
<http://www.007.com>
<http://igsbc.jpl.nasa.gov/index.html>

Instrumentos matemáticos complexos permitiram realizar com sucesso tarefas tão distintas como a programação de um voo a Marte, a previsão de resultados eleitorais, a explicação do funcionamento de alguns mecanismos do sistema nervoso, ou a abordagem crítica de obras de arte e de textos literários. Da ciência à sociedade, dos grandes avanços técnicos à solidez de uma argumentação lógica, a Matemática constrói teias de uma imensa flexibilidade resultante do carácter universal da sua linguagem.

Neste livro, personalidades de diferentes universos dão o seu testemunho sobre a forma como usam as teias matemáticas para tecer a sua própria visão do mundo.

MARIA PAULA SERRA DE OLIVEIRA é professora de Matemática na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

ISBN 972-662-970-5



9 789726 629702



gradiva



Imprensa da Universidade de Coimbra